39　面積（２）

331

(1)

$y=f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$

よって，$y=x^2$ 上の任意の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+t^2=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$

よって，

接線 l_1 の方程式は $y=2ax-a^2$　・・・①

接線 l_2 の方程式は $y=2bx-b^2$　・・・②

①－②より，$2(a-b)x-(a-b)(a+b)=0$　すなわち $(a-b)\{2x-(a+b)\}=0$

これと $a\neq b$ より，$2x-(a+b)=0$　$\therefore x=\dfrac{a+b}{2}$　・・・③

③を①に代入し，整理することにより，$y=ab$

よって，R の座標は $\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

(2)

S は次図の斜線部（境界線を含む）の面積だから，

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$$

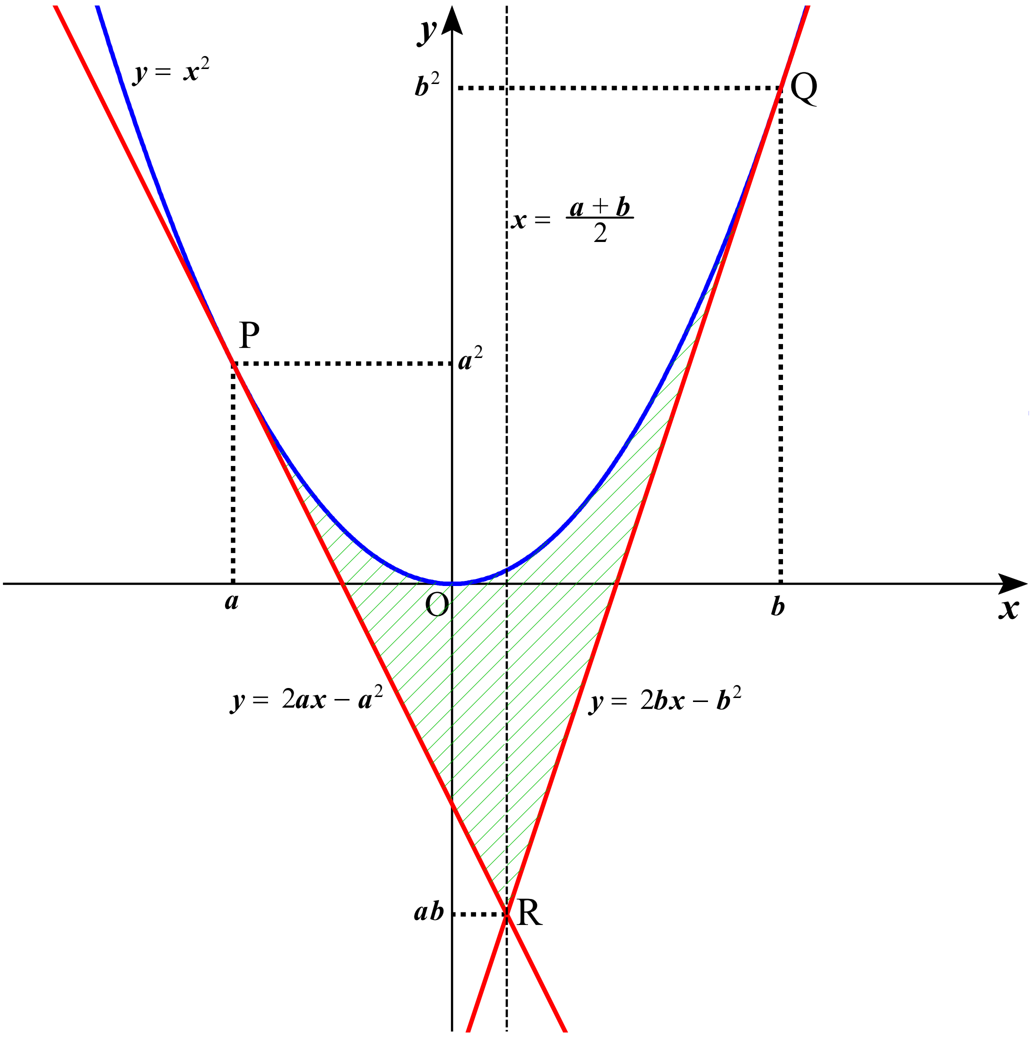
$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx-\int_b^{\frac{a+b}{2}}(x-b)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}}-\left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_b^{\frac{a+b}{2}}$$

$$=\frac{(b-a)^3}{24}-\frac{(a-b)^3}{24}$$

$$=\frac{(b-a)^3}{24}+\frac{(b-a)^3}{24}$$

$$=\frac{(b-a)^3}{12}$$



(3)

l_1 と l_2 の傾きの積が -1 だから，$4ab = -1$

よって，$a < 0 < b$ ・・・④ かつ $a = -\frac{1}{4b}$ ・・・⑤

⑤より，$S = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{1}{12}\left(b + \frac{1}{4b}\right)^3$

ここで，④と相加相乗平均より，$b + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{4b}} = 1$

（等号成立は $b = \frac{1}{4b}$ すなわち $b = \frac{1}{2}$ のとき，またこのとき⑤より $a = -\frac{1}{2}$）

よって，$S \geq \frac{1}{12}$ （等号成立は $a = -\frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$ のとき）

ゆえに，S は，$a = -\frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{12}$ をとる。

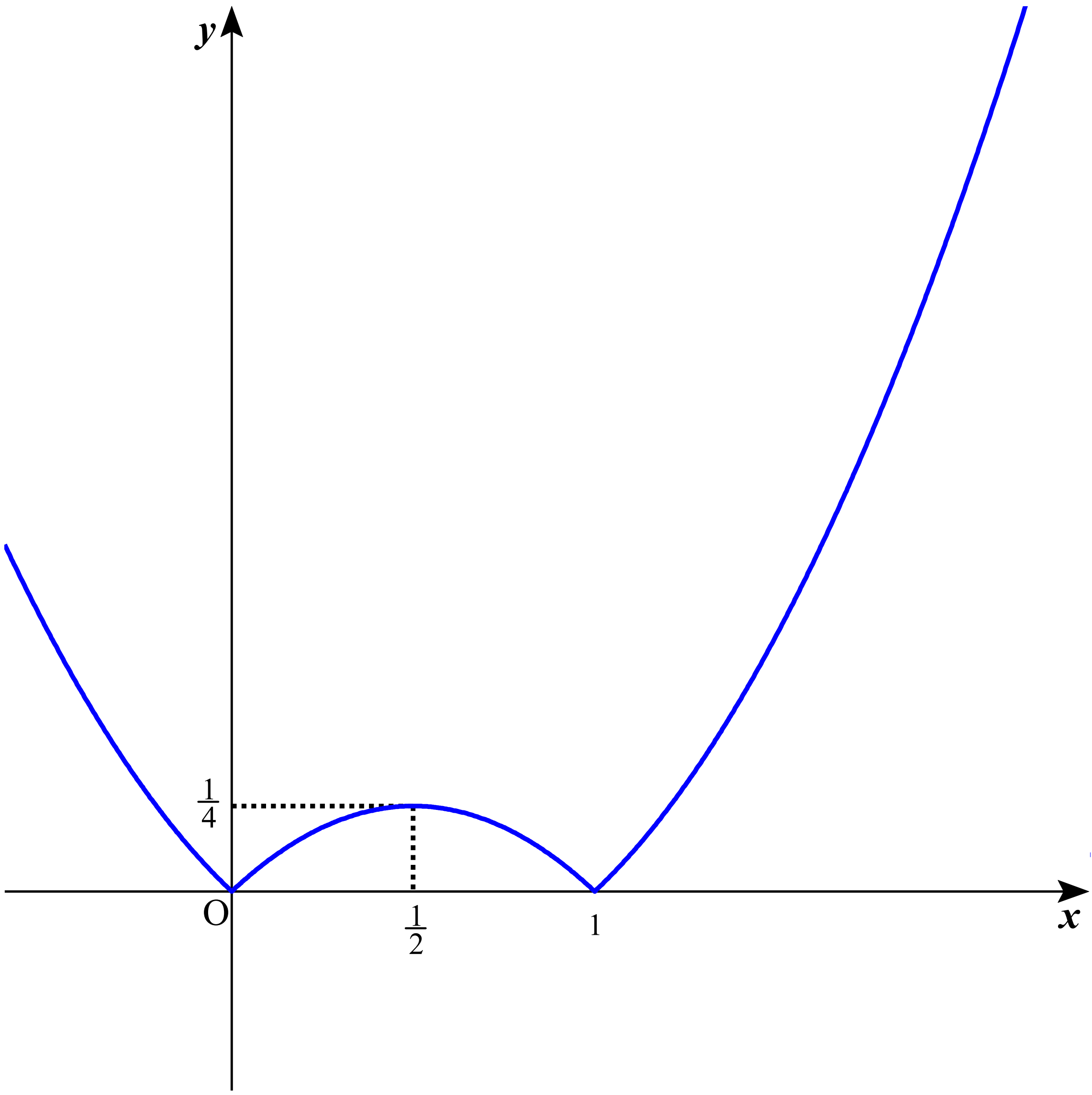
332

(1)

$x^2-x=x(x-1)$ より，$x\leq 0,\ 1\leq x$ で $x^2-x\geq 0$，$0<x<1$ で $x^2-x<0$

よって，$y=|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x & (x\leq 0,\ 1\leq x) \\ -x^2+x & (0<x<1) \end{cases}$

したがって，$y=|x^2-x|$ のグラフは下図のようになる。



この曲線と $y=ax$ との共有点の x 座標について調べると，

$y=ax$ と $y=x^2-x\ (x\leq 0,\ 1\leq x)$ の共有点 x 座標

$ax=x^2-x$ より，$x\{x-(a+1)\}=0$　$\therefore x=0,\ a+1$

また，$a>0$ より，$a+1>1$

よって，共有点の x 座標は 0，$a+1$

$y=ax$ と $y=-x^2+x\ (0<x<1)$ の共有点の x 座標

$ax=-x^2+x$ より，$x\{x+(a-1)\}=0$

これと，$0<x<1$ より

$0<-a+1<1$ すなわち $0<a<1$ のとき共有点の x 座標は $-a+1$

$1\leq a$ のとき共有点はない。

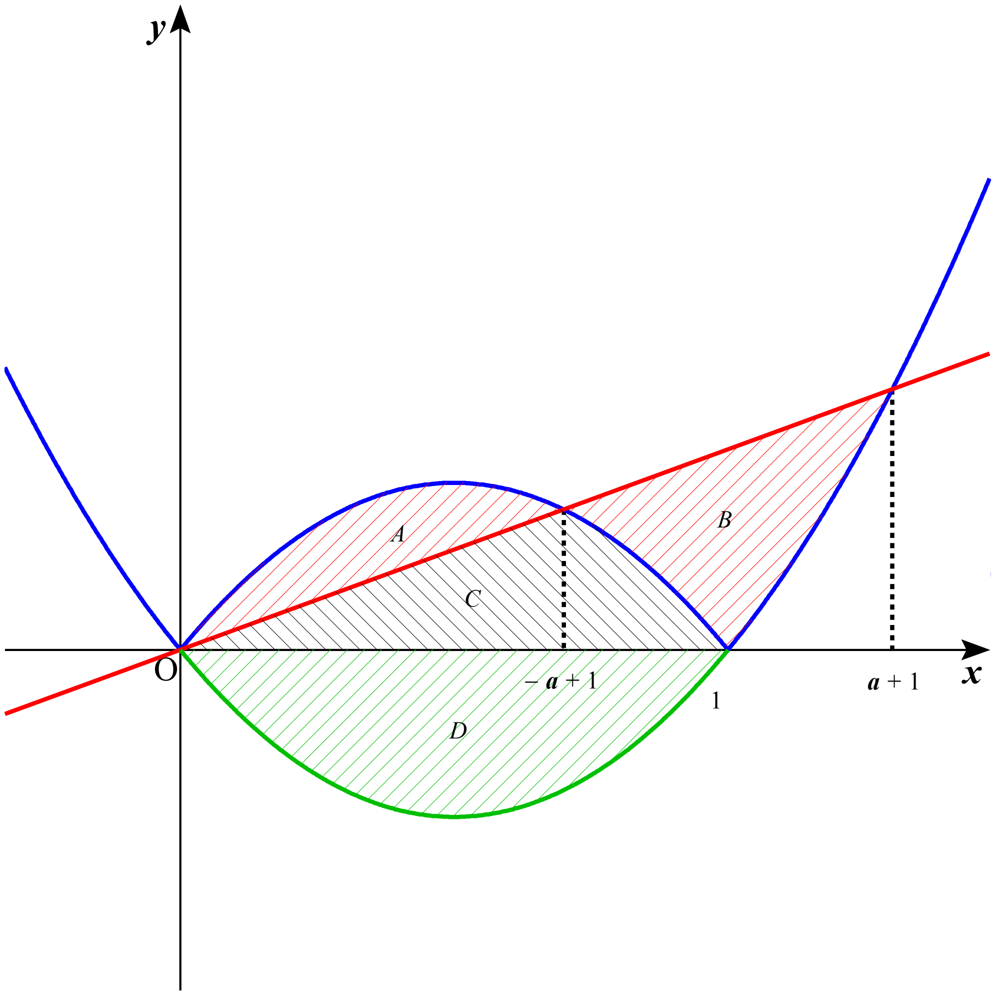
以上より，

$0<a<1$ のとき：共有点の x 座標は $0,\ -a+1,\ a+1$

$a\geq 1$ のとき：共有点の x 座標は $0,\ a+1$

S **を求める。**

$0<a<1$ のとき



図の領域 A と領域 B の面積の和を求めればよい。
式変形を工夫しふつうに求めてもいいが，出題意図を汲んで求めると，
$A+C=D$ より， $C=D-A$
よって，

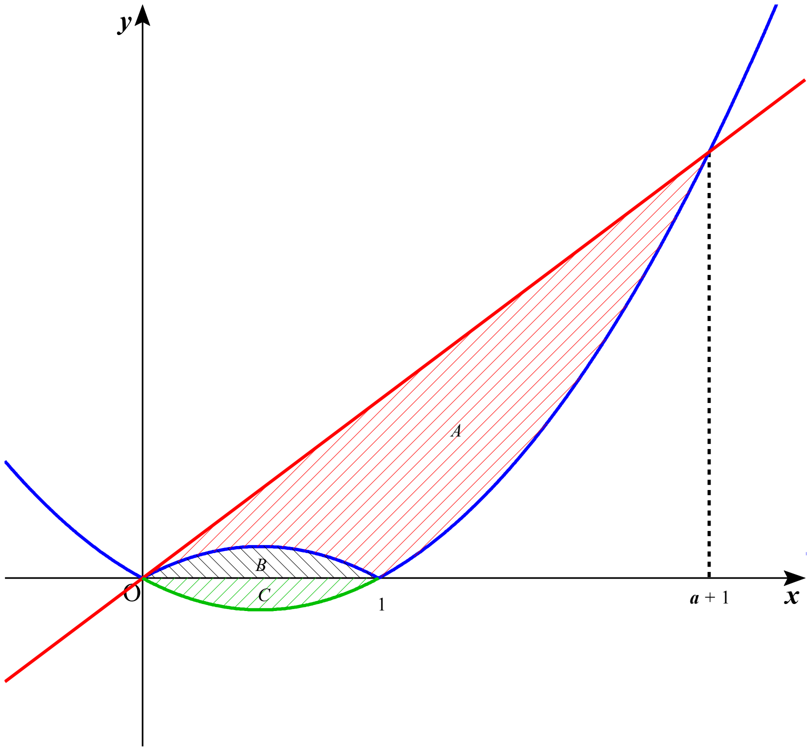
$$
\begin{aligned}
S&=A+B\\
&=A+(B+C+D)-(C+D)\\
&=A+(B+C+D)-\{(D-A)+D\}\\
&=2A+(B+C+D)-2D\\
&=2\int_0^{-a+1}\{(-x^2+x)-ax\}dx+\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx-2\int_0^1\{0-(x^2-x)\}dx\\
&=2\cdot\frac{\{(-a+1)-0\}^3}{6}+\frac{\{(a+1)-0\}^3}{6}-2\cdot\frac{(1-0)^3}{6}\\
&=\frac{1}{6}\left(-a^3+9a^2-3a+1\right)
\end{aligned}
$$

補足
式変形を工夫し，ふつうに求めると，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_1^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx+\int_{-a+1}^1\{ax-(-x^2+x)\}dx+\left\{\int_0^{-a+1}(-x^2+x)-ax\right\}dx\\
&=-\int_1^{a+1}x\{x-(a+1)\}dx+\int_{-a+1}^1 x\{x+(a-1)\}dx+\int_0^{-a+1}-x\{x+(a-1)\}dx\\
&=\int_{a+1}^1\{x-(a+1)+(a+1)\}\{x-(a+1)\}dx+\int_{-a+1}^1\{x+(a-1)-(a-1)\}\{x+(a-1)\}dx+\frac{(-a+1)^3}{6}\\
&=\int_{a+1}^1\left[\{x-(a+1)\}^2+(a+1)\{x-(a+1)\}\right]dx+\int_{-a+1}^1\left[\{x+(a-1)\}^2-(a-1)\{x+(a-1)\}\right]dx+\frac{(-a+1)^3}{6}\\
&=\left[\frac{\{x-(a+1)\}^3}{3}+\frac{(a+1)\{x-(a+1)\}^2}{2}\right]_{a+1}^1+\left[\frac{\{x+(a-1)\}^3}{3}-\frac{(a-1)\{x+(a-1)\}^2}{2}\right]_{-a+1}^1+\frac{(-a+1)^3}{6}\\
&=\frac{-a^3}{3}+\frac{a^2(a+1)}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^2(a-1)}{2}+\frac{-a^3+3a^2-3a+1}{6}\\
&=\frac{1}{6}\left(-a^3+9a^2-3a+1\right)
\end{aligned}
$$

確かに，計算が大変とは言えない。

$a \geq 1$ のとき



図より，

$$
\begin{aligned}
S &= A \\
&= (A+B+C)-(B+C) \\
&= (A+B+C)-2C \\
&= \int_0^{a+1}\left\{ax-\left(x^2-x\right)\right\}dx - 2\int_0^1\left\{0-\left(x^2-x\right)\right\}dx \\
&= \frac{\left\{(a+1)-0\right\}^3}{6} - 2\cdot\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(a^3+3a^2+3a-1\right)
\end{aligned}
$$

補足

式変形を工夫し，ふつうに求めると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^{a+1}\left\{ax-\left(x^2-x\right)\right\}dx + \int_0^1\left\{ax-\left(-x^2+x\right)\right\}dx \\
&= -\int_{a+1}^1\left[\left\{x-(a+1)\right\}^2+(a+1)\left\{x-(a+1)\right\}\right]dx + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{(a-1)}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= -\left[\frac{\left\{x-(a+1)\right\}^3}{3}+\frac{(a+1)\left\{x-(a+1)\right\}^2}{2}\right]_{a+1}^1 + \frac{3a-1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(a^3+3a^2+3a-1\right)
\end{aligned}
$$

(2)

$0<a<1$ のとき

$S=\frac{1}{6}\left(-a^3+9a^2-3a+1\right)$ より，$S'=-\frac{1}{2}\left(a^2-6a+1\right)$

よって，$S'=0$ のとき $a=3\pm 2\sqrt{2}$

したがって，S の増減は次表のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S	$\lim\limits_{a\to+0} S$	$\downarrow$	極小値	$\uparrow$	$\lim\limits_{a\to1-0} S$

$\lim\limits_{a\to+0} S=\frac{1}{6}$，$\lim\limits_{a\to1-0} S=1$

極小値について

$$S=-\frac{1}{6}\left(a^3-9a^2+3a-1\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\left\{(a-3)\left(a^2-6a+1\right)-16a+2\right\}$$

ここで，$a=3-2\sqrt{2}$ のとき $a^2-6a+1=0$

よって，

$$S=-\frac{1}{6}\left\{(a-3)\left(a^2-6a+1\right)-16a+2\right\}$$
$$=-\frac{1}{6}\left\{-16\left(3-2\sqrt{2}\right)+2\right\}$$
$$=\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$$

よって，S は $a=3-2\sqrt{2}$ で最小値 $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$ をとる。

$a\geq 1$ のとき

$S=\frac{1}{6}\left(a^3+3a^2+3a-1\right)$ より，$S'=\frac{(a+1)^2}{2}\geq 0$

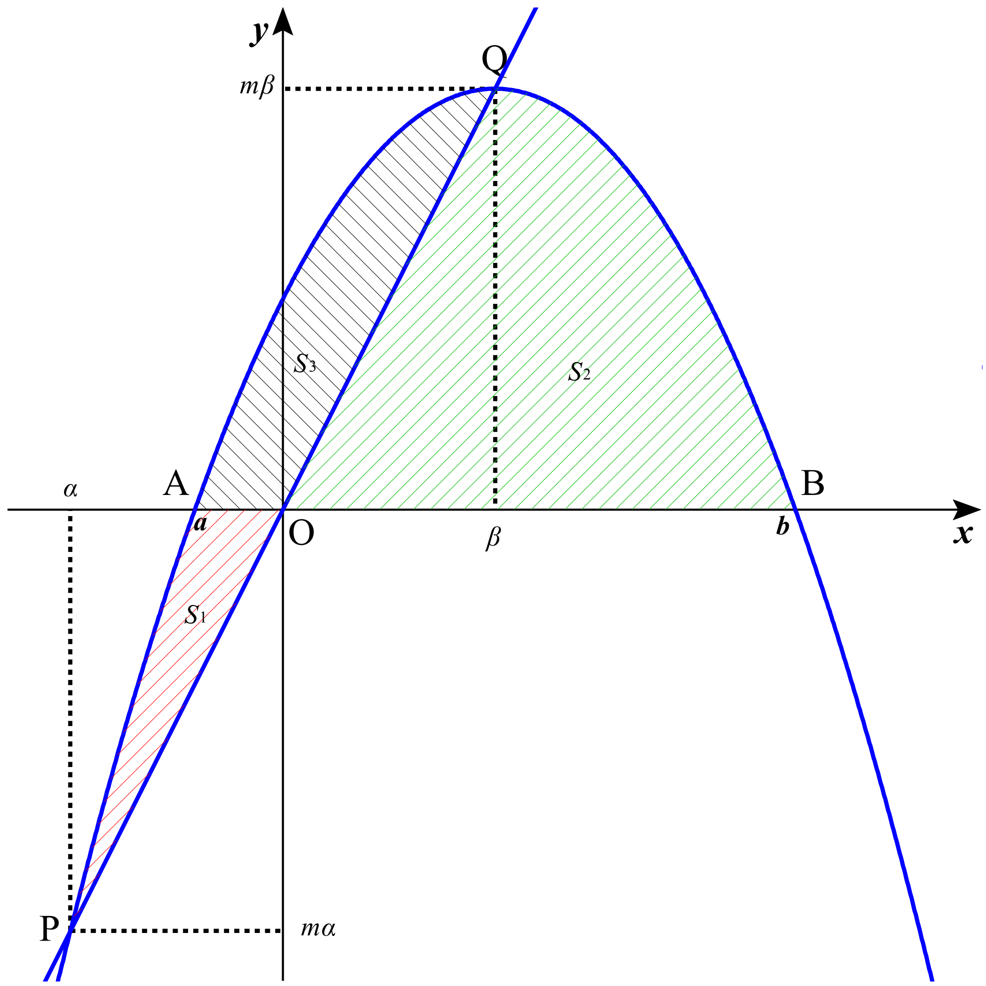
よって，S は単調増加する。

ゆえに，S は $a=1$ で最小値 1 をとる。

以上より，

S は $a=3-2\sqrt{2}$ で最小値 $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$ をとる。

333



上図で示したように,
線分 OP，OA と C で囲まれた領域の面積を S_1
線分 OQ，OB と C で囲まれた領域の面積を S_2
線分 OA，OQ と C で囲まれた領域の面積を S_3　とすると,

$$S_1+S_3=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x+1)-mx\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\beta)(x-\alpha)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}(x-a)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$
$$=-\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

同様にして，

$$S_2+S_3=\int_a^b\{(-x^2+2x+1)-0\}dx$$
$$=\frac{(b-a)^3}{6}$$

これと，$S_1=S_2 \Leftrightarrow S_1+S_3=S_2+S_3$ より，

$S_1+S_3=S_2+S_3$ すなわち $\beta-\alpha=b-a$ が成り立つときの m の値を求めればよい。

$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ は $-x^2+2x+1=mx$　すなわち $x^2+(m-2)x-1=0$ の解だから，

解の公式により，$\alpha=\dfrac{-m+2-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$, $\beta=\dfrac{-m+2+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

よって，$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}$　・・・①

$a,\ b\ (a<b)$ は $-x^2+2x+1=0$ の解だから，

解の公式により，$a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}$

よって，$b-a=2\sqrt{2}$　・・・②

①＝②より，$m^2-4m+8=8$　すなわち $m(m-4)=0$

これと $m\neq0$ より，$m=4$

334

(1)

$y=f(x)=x^3-3ax^2+bx$ とおくと，$f'(x)=3x^2-6ax+b$

よって，$y=f(x)$ 上の任意の点 $(t,\ f(t))$ の接線の傾きの最小値は

$$f'(t)=3t^2-6ax+b$$
$$=3(x-a)^2-3a^2+b$$

より，$-3a^2+b$

これが -3 であるから，$-3a^2+b=-3$　$\therefore b=3a^2-3$

(2)

(1)より，

$$y=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$$
$$=x\{x^2-3ax+3(a^2-1)\}$$

よって，$x^2-3ax+3(a^2-1)=0$ が正と負の解をもてばよい。

このとき，

2 つの解は異なる 2 実数解だから，判別式を D とすると，$D>0$

これと，$D=-3a^2+12=-3(a+2)(a-2)$ より，$-2<a<2$　・・・①

2 つの解の積は負だから，解と係数の韓系より，$3(a^2-1)<0$　$\therefore -1<a<1$　・・・②

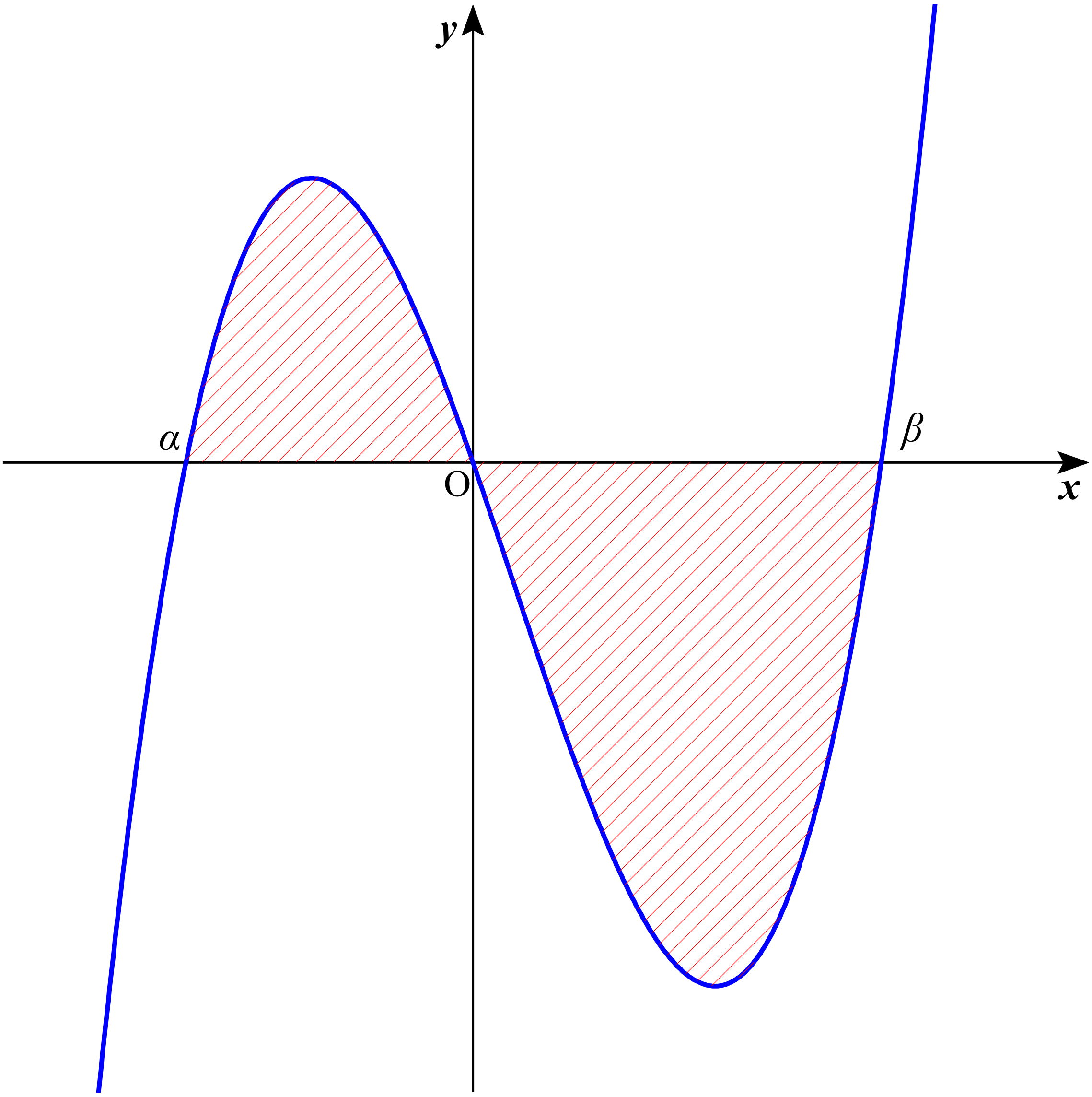
よって，①かつ②より，$-1<a<1$

(3)

(2)において，$x^2-3ax+3(a^2-1)=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

C と x 軸との共有点は $0,\ \alpha,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$ だから，

曲線 C の概形は下図青色実線のようになる。



また，

$$x^2-3ax+3(a^2-1)=x(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

より，

$$x^3-3ax^2+3(a^2-1)x=x\{x^2-3ax+3(a^2-1)\}$$
$$=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$

ただし，

$\alpha+\beta=3a$ ・・・① $\alpha\beta=3(a^2-1)$ ・・・② $-1<a<1$ ・・・③

したがって，C と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とすると，

$$S(a)=\int_0^\beta\left[0-x\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\right]dx+\int_\alpha^0\left[x\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}-0\right]dx$$
$$=\int_0^\beta\{-x^3+(\alpha+\beta)x^2-\alpha\beta x\}dx+\int_0^\alpha\{-x^3+(\alpha+\beta)x^2-\alpha\beta x\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{(\alpha+\beta)}{3}x^3-\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{(\alpha+\beta)}{3}x^3-\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\alpha$$
$$=-\frac{\beta^4}{4}+\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}-\frac{\alpha\beta^3}{2}-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}-\frac{\alpha^3\beta}{2}$$
$$=\frac{\alpha^4+\beta^4}{12}-\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{6}$$
$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2}{12}-\frac{\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{6}$$
$$=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2}{12}-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2-2(\alpha\beta)^2}{6}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^4-6\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+6(\alpha\beta)^2}{12}$$

これに①と②を代入し，整理することにより，$S(a)=\frac{9}{4}\left(-a^4+2a^2+2\right)$

よって，$S'(a)=\frac{9}{4}\left(-4a^3+4a\right)=-9a(a+1)(a-1)$

これと③より，$S(a)$ の増減は次表のようになる。

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$S'(a)$	/	$-$	0	$+$	/
$S(a)$	/	↓	$\frac{9}{2}$	↑	/

よって，面積は $a=0$ で最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

335

$\mathrm{P}\left(t,\ t^2+m^2\right)$ とおくと，点 P における C_1 の接線の方程式は，$y=2t(x-t)+t^2+m^2$ より，

$y=2tx-t^2+m^2$

よって，この接線と C_2 との交点の x 座標は $x^2=2tx-t^2+m^2$

すなわち $x^2-2tx+t^2-m^2=0$ の解である。

これと，

$$
\begin{aligned}
x^2-2tx+t^2-m^2&=(x-t)^2-m^2\\
&=\{(x-t)+m\}\{(x-t)-m\}\\
&=\{x-(t-m)\}\{x-(t+m)\}
\end{aligned}
$$

より，その解は $t-m,\ t+m$

よって，$\mathrm{A}\left(t-m,\ (t-m)^2\right)$，$\mathrm{B}\left(t+m,\ (t+m)^2\right)$，$\mathrm{Q}\left(u,\ u^2\right)\ (t-m<u<t+m)$ とおき，

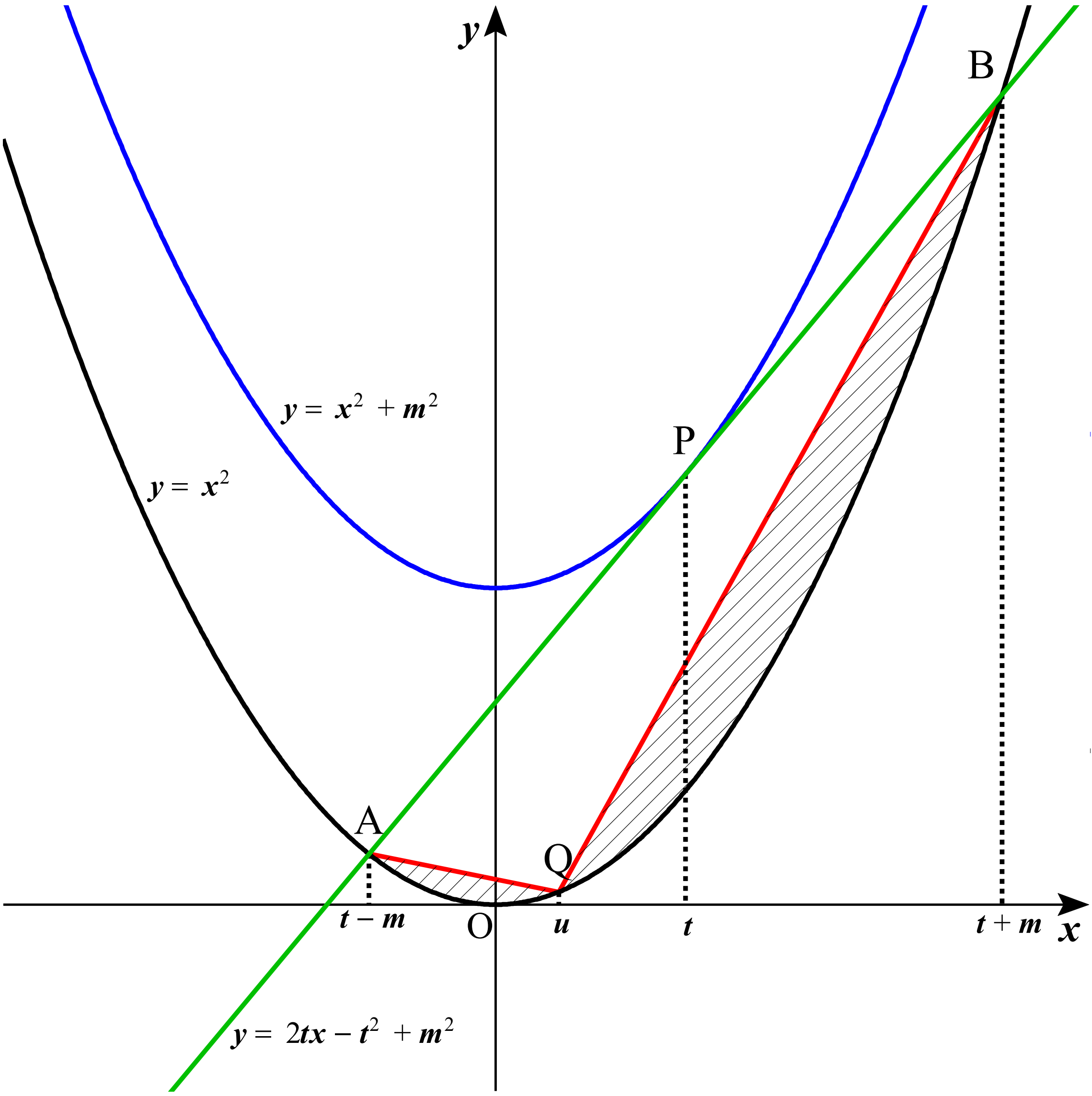
直線 AQ および直線 QB の方程式をそれぞれ $y=f(x)$，$y=g(x)$ とすると，

$f(x)-x^2=-(x-u)\{x-(t-m)\}$，$g(x)-x^2=-(x-u)\{x-(t+m)\}$ より，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{t-m}^{u}\left[-(x-u)\{x-(t-m)\}\right]dx+\int_{u}^{t+m}\left[-(x-u)\{x-(t+m)\}\right]dx\\
&=\int_{u}^{t-m}(x-u)\{(x-u)+u-(t-m)\}dx-\int_{u}^{t+m}(x-u)\{(x-u)+u-(t+m)\}dx\\
&=\int_{u}^{t-m}\left\{(x-u)^2+(u-t+m)(x-u)\right\}dx-\int_{u}^{t+m}\left\{(x-u)^2+(u-t-m)(x-u)\right\}dx\\
&=\left[\frac{(x-u)^3}{3}+\frac{(u-t+m)(x-u)^2}{2}\right]_{u}^{t-m}-\left[\frac{(x-u)^3}{3}+\frac{(u-t-m)(x-u)^2}{2}\right]_{u}^{t+m}\\
&=\frac{(u-t+m)^3}{6}+\frac{(t+m-u)^3}{6}\\
&=\frac{\{m-(t-u)\}^3+\{m+(t-u)\}^3}{6}\\
&=m(t-u)^2+\frac{m^2}{3}
\end{aligned}
$$

よって，S は $t=u$ で最小値 $\dfrac{m^2}{3}$ をとる。

ゆえに，S の最小値は P のとり方によらず $\dfrac{m^2}{3}$ である。


y
B
y = x^2 + m^2
P
y = x^2
A
Q
t − m
O
u
t
t + m
x
y = 2tx − t^2 + m^2

336

(1)

2 曲線の交点の x 座標の値は $x^3=2x^2-ax$　すなわち，$x(x^2-2x+a)=0$　・・・①

の解である。したがって, ①が異なる 3 つの実数解をもつための a の条件を求めればよい。

①より，

$x=0$

$x^2-2x+a=0$　・・・②

よって，②は $x=0$ でない異なる 2 実数解をもつ。

②について，

$x=0$ が解ではないから，$0^2-2\cdot 0+a\neq 0$　$\therefore a\neq 0$　・・・③

判別式を D とすると，$D>0$

これと，$\dfrac{D}{4}=1-a>0$　$\therefore a<1$　・・・④

よって，求める a の条件は，③かつ④より，$a<0,\ 0<a<1$

(2)

②の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2$　・・・⑤　$\alpha\beta=a$　・・・⑥

また，$x^2-2x+a=(x-\alpha)(x-\beta)$ より，

$x^3-(2x^2-ax)=x(x^2-2x+a)=x(x-\alpha)(x-\beta)$　・・・⑦

(i)　$0<a<1$ のとき

⑤，⑥より，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$　$\therefore 0<\alpha<\beta$

これと⑦より，$0\leq x\leq\alpha$ で $x^3-(2x^2-ax)\geq 0$，$\alpha\leq x\leq\beta$ で $x^3-(2x^2-ax)\leq 0$

よって, 2 つの部分の面積が等しいとき，$\int_0^\alpha\{x^3-(2x^2-ax)\}dx=-\int_\alpha^\beta\{x^3-(2x^2-ax)\}dx$ より，

$$\int_0^\alpha\{x^3-(2x^2-ax)\}dx+\int_\alpha^\beta\{x^3-(2x^2-ax)\}dx=0$$

これと，

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha\{x^3-(2x^2-ax)\}dx+\int_\alpha^\beta\{x^3-(2x^2-ax)\}dx&=\int_0^\beta\{x^3-(2x^2-ax)\}dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^\beta\\&=\frac{\beta^4}{4}-\frac{2}{3}\beta^3+\frac{a}{2}\beta^2\\&=\frac{\beta^2(3\beta^2-8\beta+6a)}{12}\end{aligned}$$

より，

$\dfrac{\beta^2(3\beta^2-8\beta+6a)}{12}=0$

よって，$3\beta^2-8\beta+6a=0\ (\because \beta>0)$

ここで，β は②の解で値が大きい方だから，$\beta^2-2\beta+a=0$ かつ $\beta=1+\sqrt{1-a}$ より，

$$\begin{aligned}3\beta^2-8\beta+6a&=3(\beta^2-2\beta+a)-2\beta+3a\\&=-2\beta+3a\\&=-2(1+\sqrt{1-a})+3a\\&=-2\sqrt{1-a}+3a-2\end{aligned}$$

よって，$-2\sqrt{1-a}+3a-2=0$　すなわち $3a-2=2\sqrt{1-a}$　・・・⑧

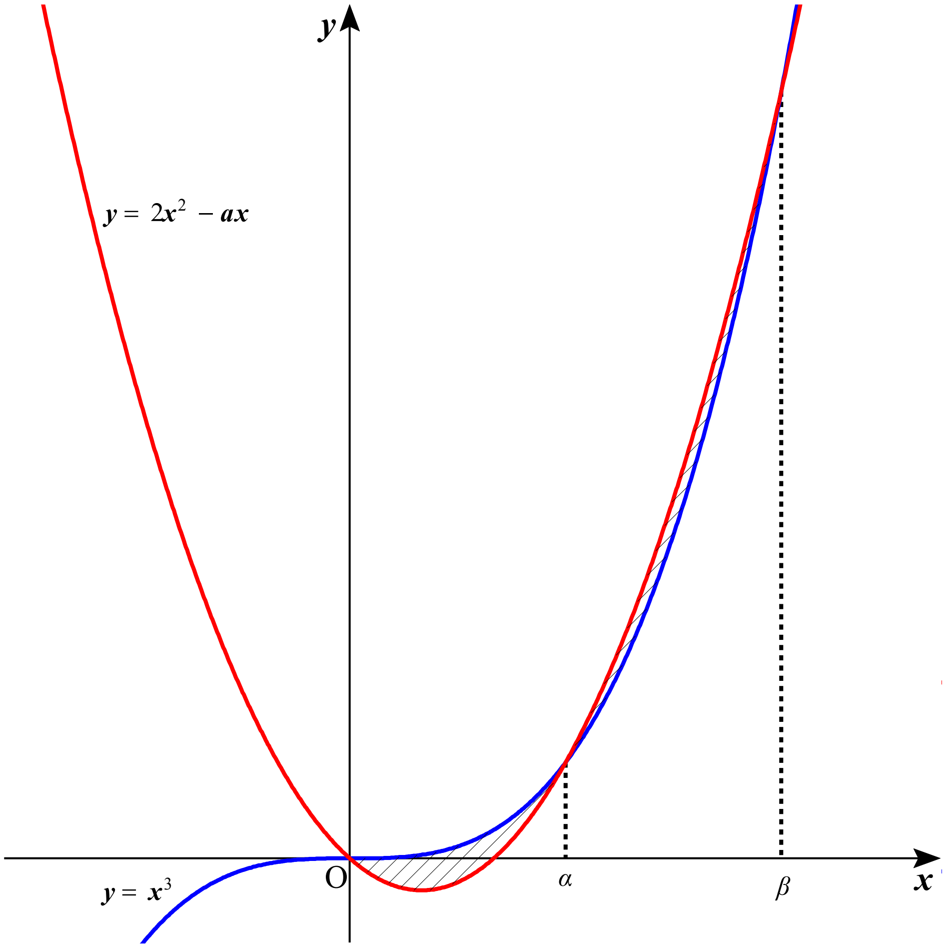
両辺を 2 乗すると，$9a^2-12a+4=4(1-a)$　$\therefore a(9a-8)=0$

$a\neq 0$ より，$a=\dfrac{8}{9}$

これは，⑧および $0<a<1$ を満たす。

よって，$a=\dfrac{8}{9}$

参考図：$0<a<1$ のときの概形



(ii) $a<0$ のとき

⑥より，$\alpha\beta<0$ $\therefore \alpha<0<\beta$

これと⑦より，

$\alpha \leq x \leq 0$ で $x^3-(2x^2-ax) \geq 0$，$0 \leq x \leq \beta$ で $x^3-(2x^2-ax) \leq 0$

よって, 2 つの部分の面積が等しいとき，$\int_\alpha^0 \{x^3-(2x^2-ax)\}dx = -\int_0^\beta \{x^3-(2x^2-ax)\}dx$ より，

$$\int_\alpha^0 \{x^3-(2x^2-ax)\}dx + \int_0^\beta \{x^3-(2x^2-ax)\}dx = 0$$

これと，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^0 \{x^3-(2x^2-ax)\}dx + \int_0^\beta \{x^3-(2x^2-ax)\}dx &= \int_\alpha^\beta \{x^3-(2x^2-ax)\}dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{\beta^4-\alpha^4}{4}-\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)\end{aligned}$$

より，$\dfrac{\beta^4-\alpha^4}{4}-\dfrac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\dfrac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)=0$

ここで，⑤と⑥より，

$$\begin{aligned}\beta^4-\alpha^4 &= (\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2) \\ &= (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\} \\ &= (\beta-\alpha)(8-4a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^3-\alpha^3 &= (\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) \\ &= (\beta-\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\} \\ &= (\beta-\alpha)(4-a)\end{aligned}$$

$$\beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot 2$$

よって，

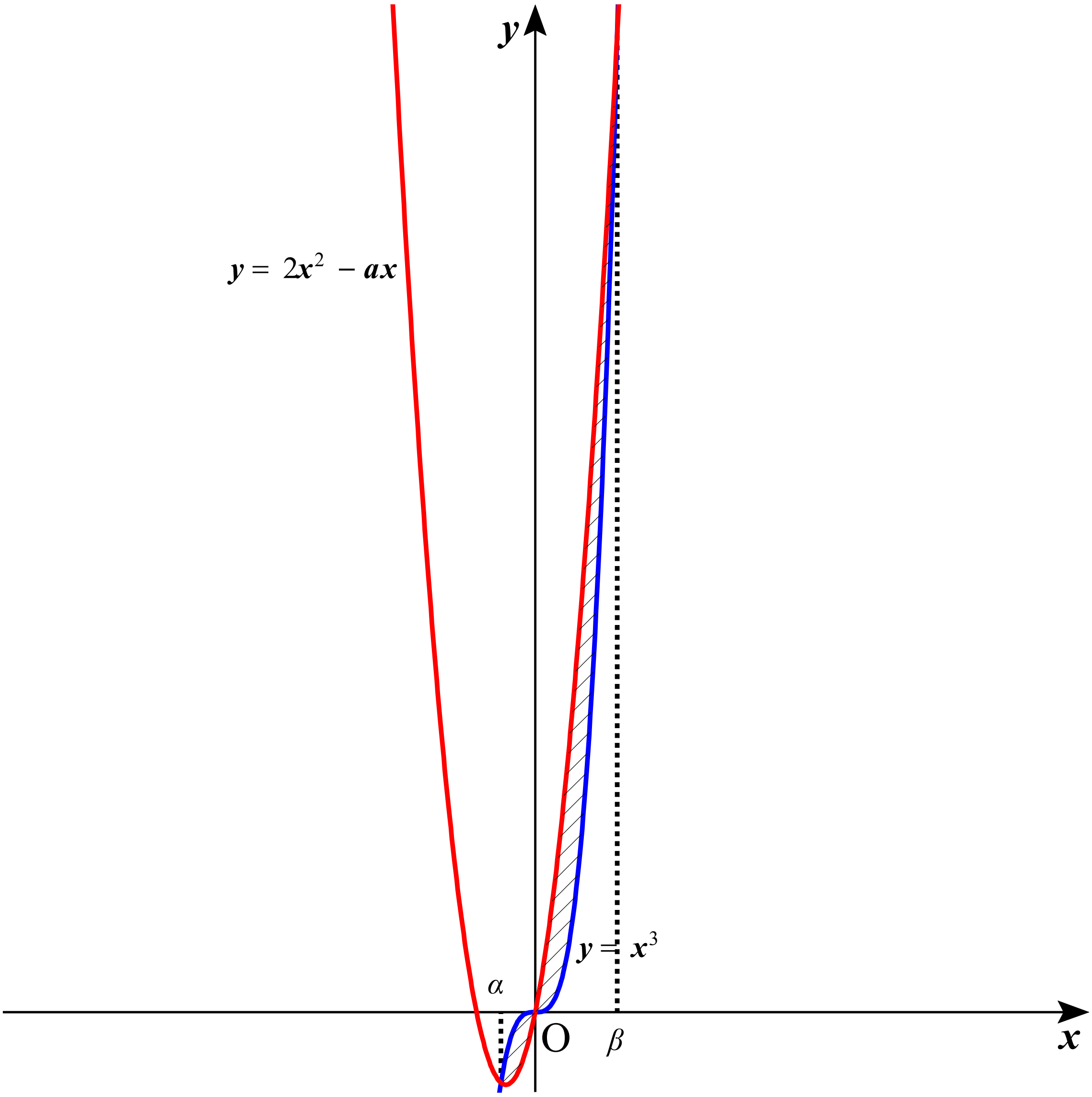
$$\begin{aligned}\frac{\beta^4-\alpha^4}{4}-\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2) &= (\beta-\alpha)(2-a)-\frac{2(\beta-\alpha)(4-a)}{3}+a(\beta-\alpha) \\ &= \frac{2(\beta-\alpha)(a-1)}{3}\end{aligned}$$

より，$\dfrac{2(\beta-\alpha)(a-1)}{3}=0$

よって，$a=1$ ところが，これは $a<0$ を満たさない。 ゆえに，不適

(i)，(ii)より，求める a の値は $\dfrac{8}{9}$

参考図： $a < 0$ のときの概形



337

(1)

解法 1

直線 PQ を $y=f(x)$ とすると，これと $y=1-x^2$ の交点の x 座標が $p,\ q$ だから，

$1-x^2-f(x)=-(x-p)(x-q)$

よって，直線 PQ と放物線 C で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$\begin{aligned}S_1&=-\int_p^q (x-p)(x-q)dx\\&=-\int_p^q (x-p)\{(x-p)+p-q\}dx\\&=-\int_p^q \{(x-p)^2-(q-p)(x-p)\}dx\\&=\left[-\frac{(x-p)^3}{3}+\frac{(q-p)(x-p)^2}{2}\right]_p^q\\&=\frac{(q-p)^3}{6}\end{aligned}$$

△POQ の面積を S_2 とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}p\\1-p^2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}q\\1-q^2\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\left|p(1-q^2)-q(1-p^2)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|p-q+pq(p-q)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|(p-q)(1+pq)\right|\\&=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|\end{aligned}$$

また，直線 PQ の方程式を求めると，

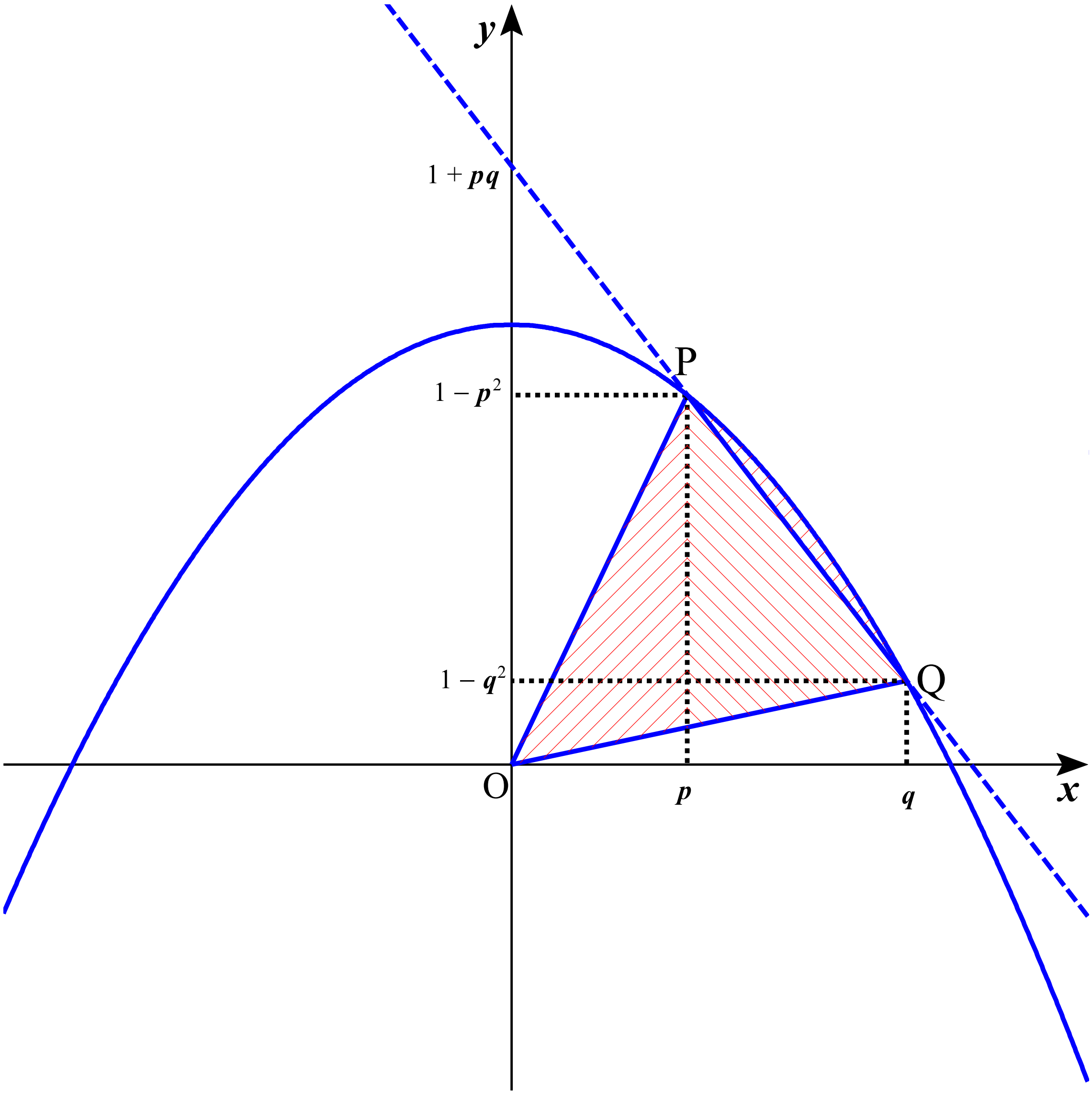
$$\begin{aligned}y&=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p)+1-p^2\\&=(p+q)x+1+pq\end{aligned}$$

より，切片は $1+pq$ である。

(i) $1+pq\geq 0$ のとき

次図より，

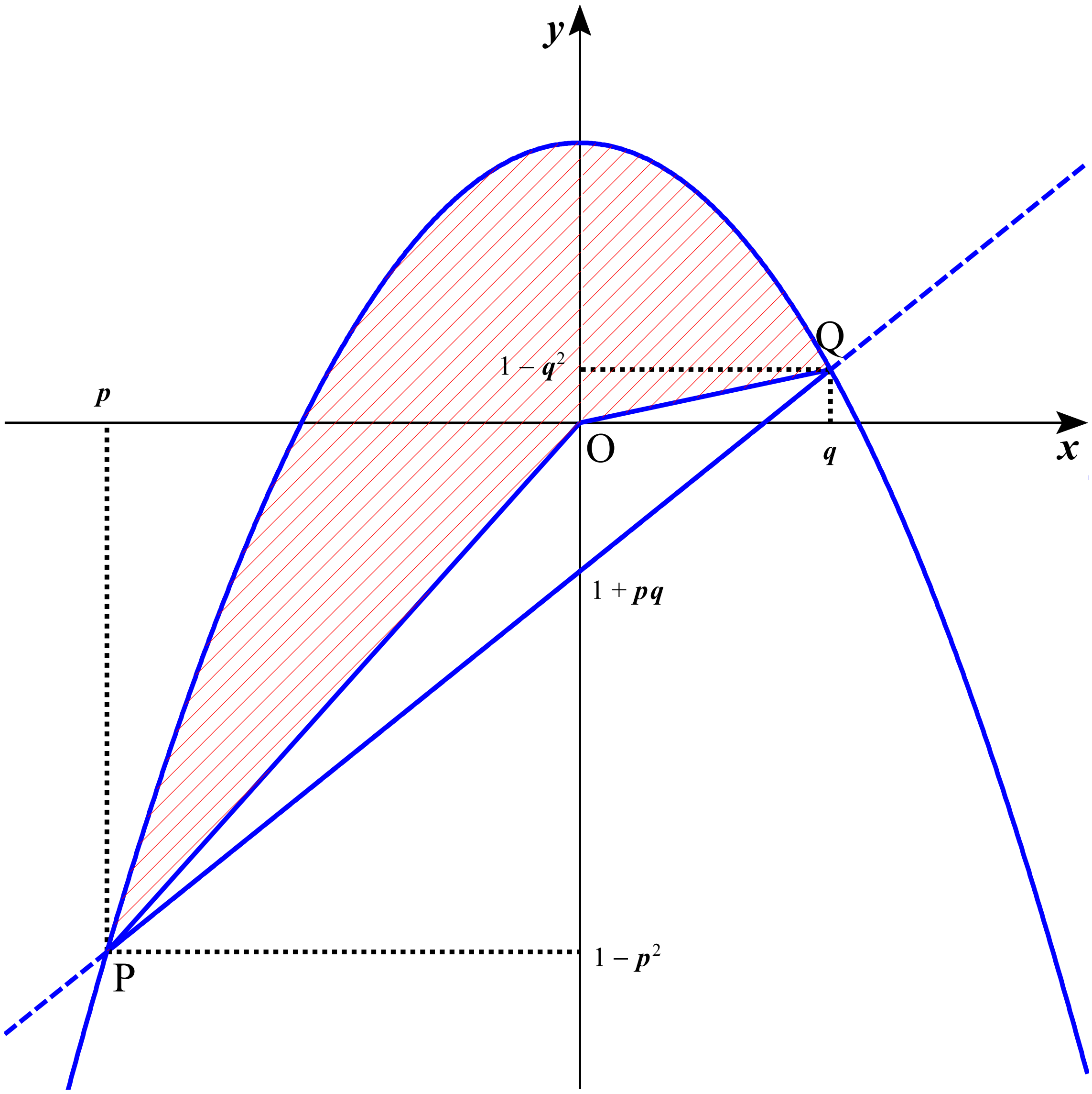
$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\frac{(q-p)^3}{6}+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)\\&=\frac{(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}{6}\end{aligned}$$



y
$1+pq$
P
$1-p^2$
$1-q^2$
Q
O
p
q
x

(ii) $1+pq<0$ のとき
次図より，

$$S = S_1 - S_2$$
$$= \frac{(q-p)^3}{6} - \frac{1}{2}(q-p)|1+pq|$$
$$= \frac{(q-p)^3}{6} + \frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$
$$= \frac{(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}{6}$$



(i)，(ii)より，$S = \dfrac{(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}{6}$

解法 2

(i)　$p<q<0$ のとき

下図斜線部（境界を含む）の面積が S である。

これと，直線 OP と OQ の方程式がそれぞれ $y=\dfrac{1-p^2}{p}x$，$y=\dfrac{1-q^2}{q}x$ であることから，

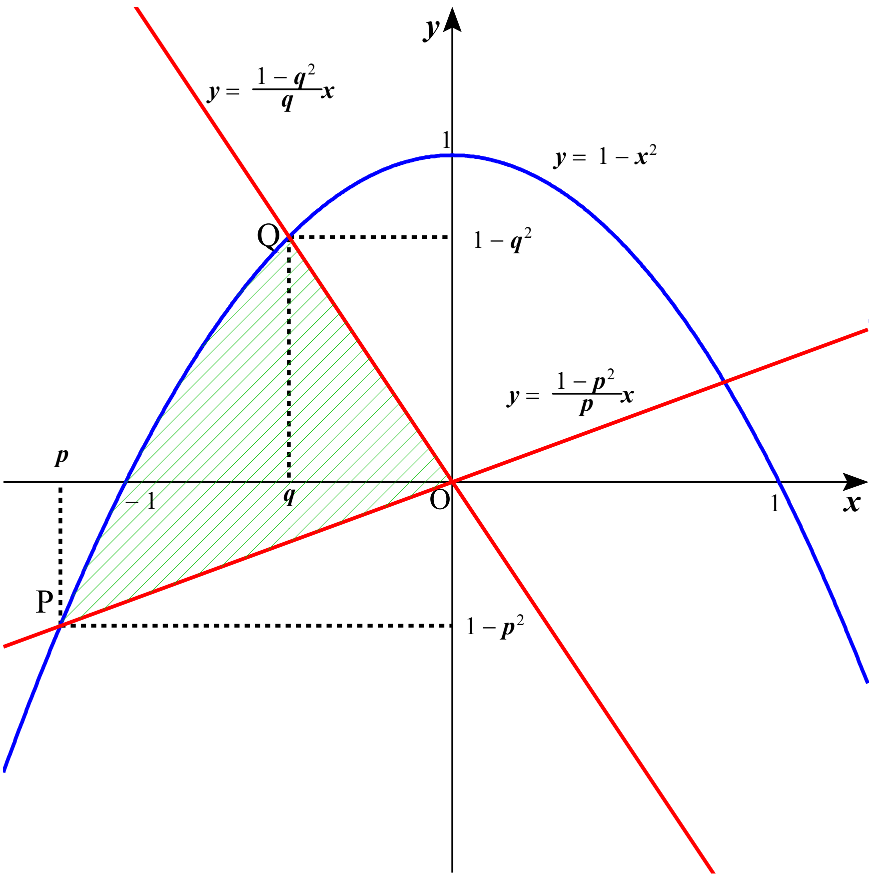
$$S=\int_p^0\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-p^2}{p}x\right\}dx-\int_q^0\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-q^2}{q}x\right\}dx$$

$$=\int_0^p\left(x^2+\frac{1-p^2}{p}-1\right)dx-\int_0^q\left(x^2+\frac{1-q^2}{q}-1\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-p^2}{2p}x^2-x\right]_0^p-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-q^2}{2q}x^2-x\right]_0^q$$

$$=\frac{q^3-p^3}{6}+\frac{q-p}{2}$$

$$=\frac{(q-p)\left(p^2+pq+q^2+3\right)}{6}$$



(ii)　$p<0<q$ のとき

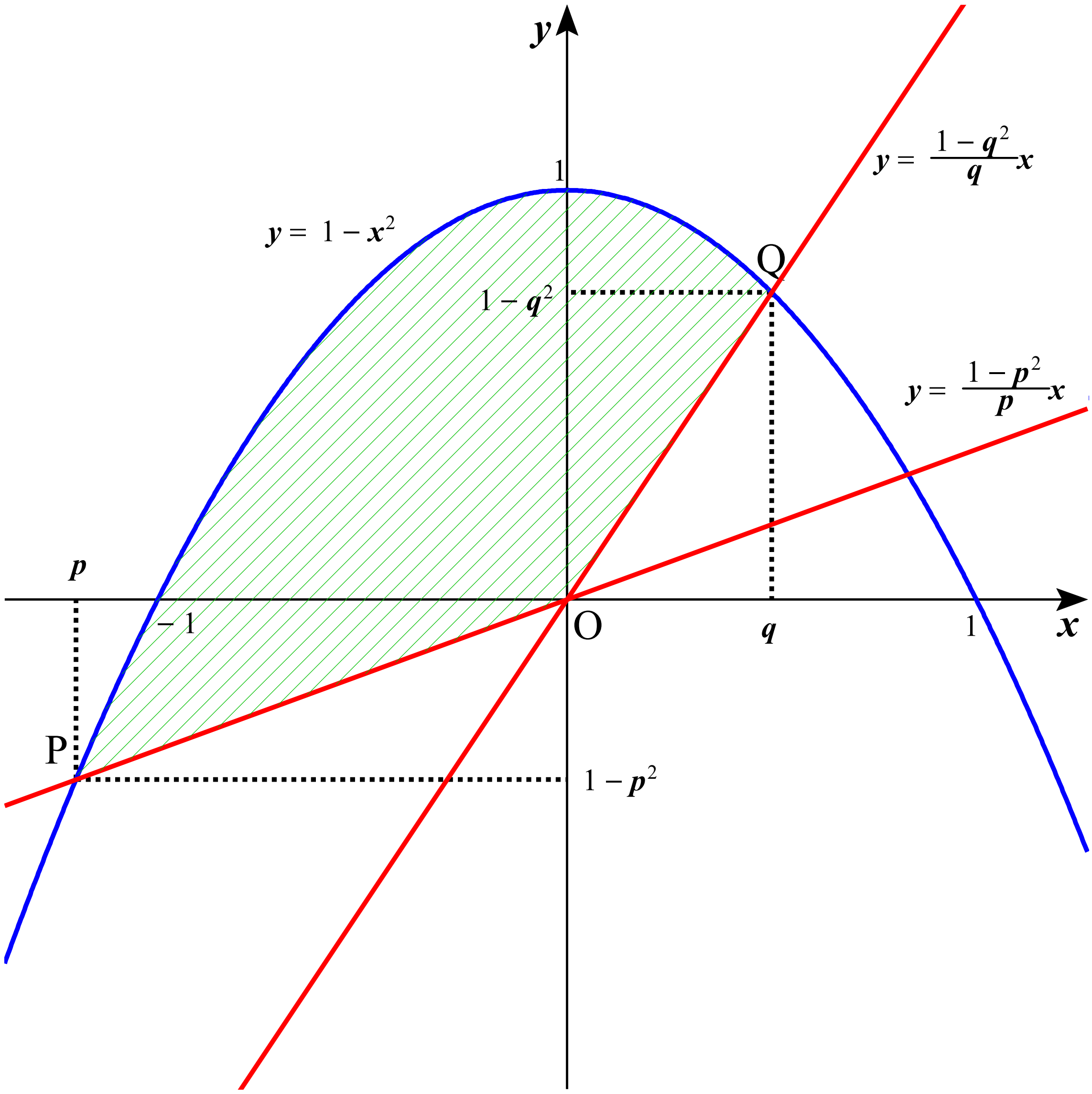
下図斜線部（境界を含む）の面積が S である。

よって，

$$S=\int_p^0\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-p^2}{p}x\right\}dx+\int_0^q\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-q^2}{q}x\right\}dx$$

$$=\int_0^p\left(x^2+\frac{1-p^2}{p}-1\right)dx-\int_0^q\left(x^2+\frac{1-q^2}{q}-1\right)dx$$

$$=\frac{(q-p)\left(p^2+pq+q^2+3\right)}{6}$$



(iii)　$0 < p < q$ のとき

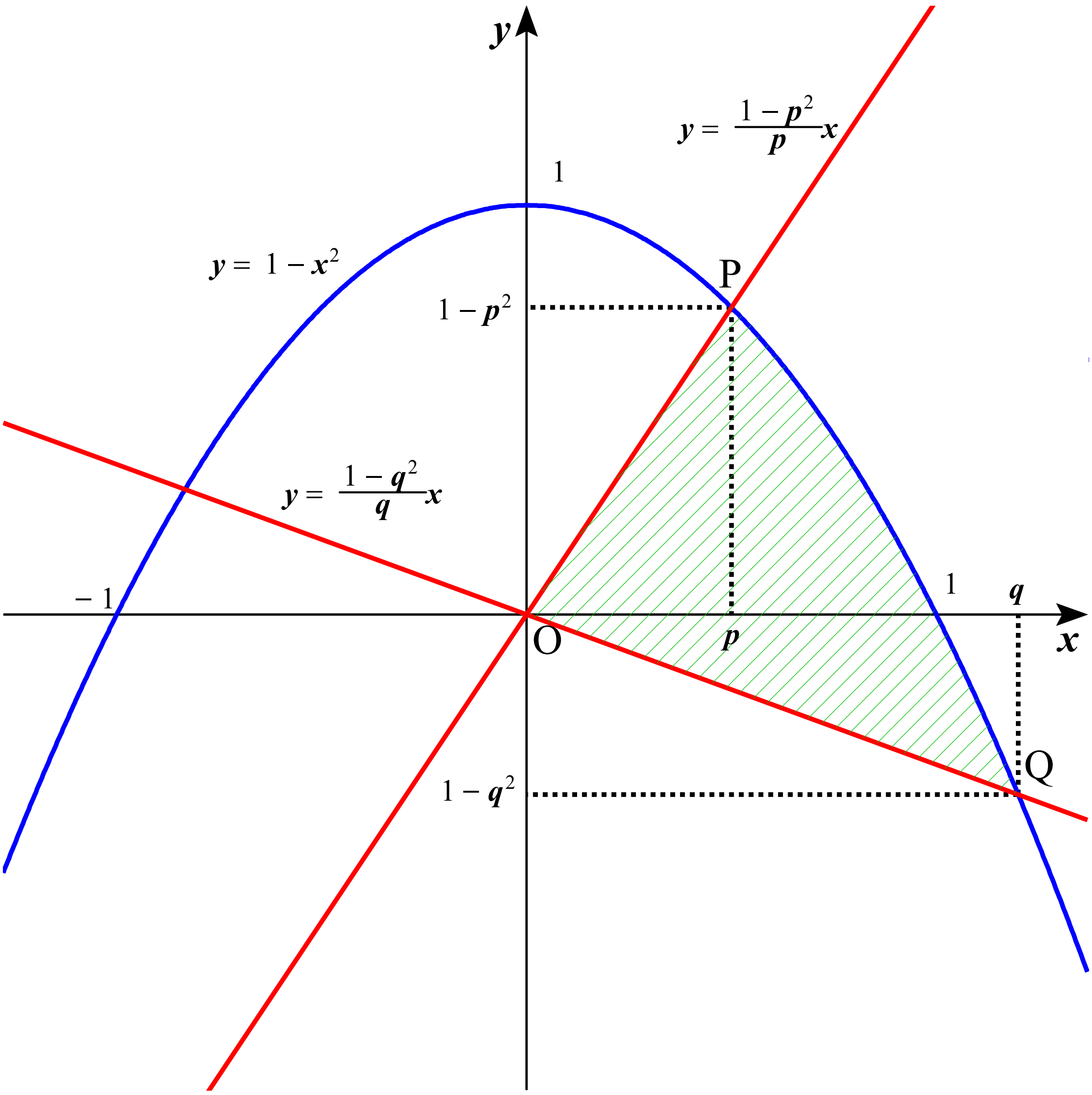
下図斜線部（境界を含む）の面積が S である。

よって，

$$S = \int_0^q \left\{ \left(1 - x^2\right) - \frac{1 - q^2}{q} x \right\} dx - \int_0^p \left\{ \left(1 - x^2\right) - \frac{1 - p^2}{p} x \right\} dx$$

$$= \int_0^p \left(x^2 + \frac{1 - p^2}{p} - 1 \right) dx - \int_0^q \left(x^2 + \frac{1 - q^2}{q} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{(q - p)\left(p^2 + pq + q^2 + 3\right)}{6}$$



(iv) $p=0$ のとき

下図斜線部（境界を含む）の面積が S である。

よって，

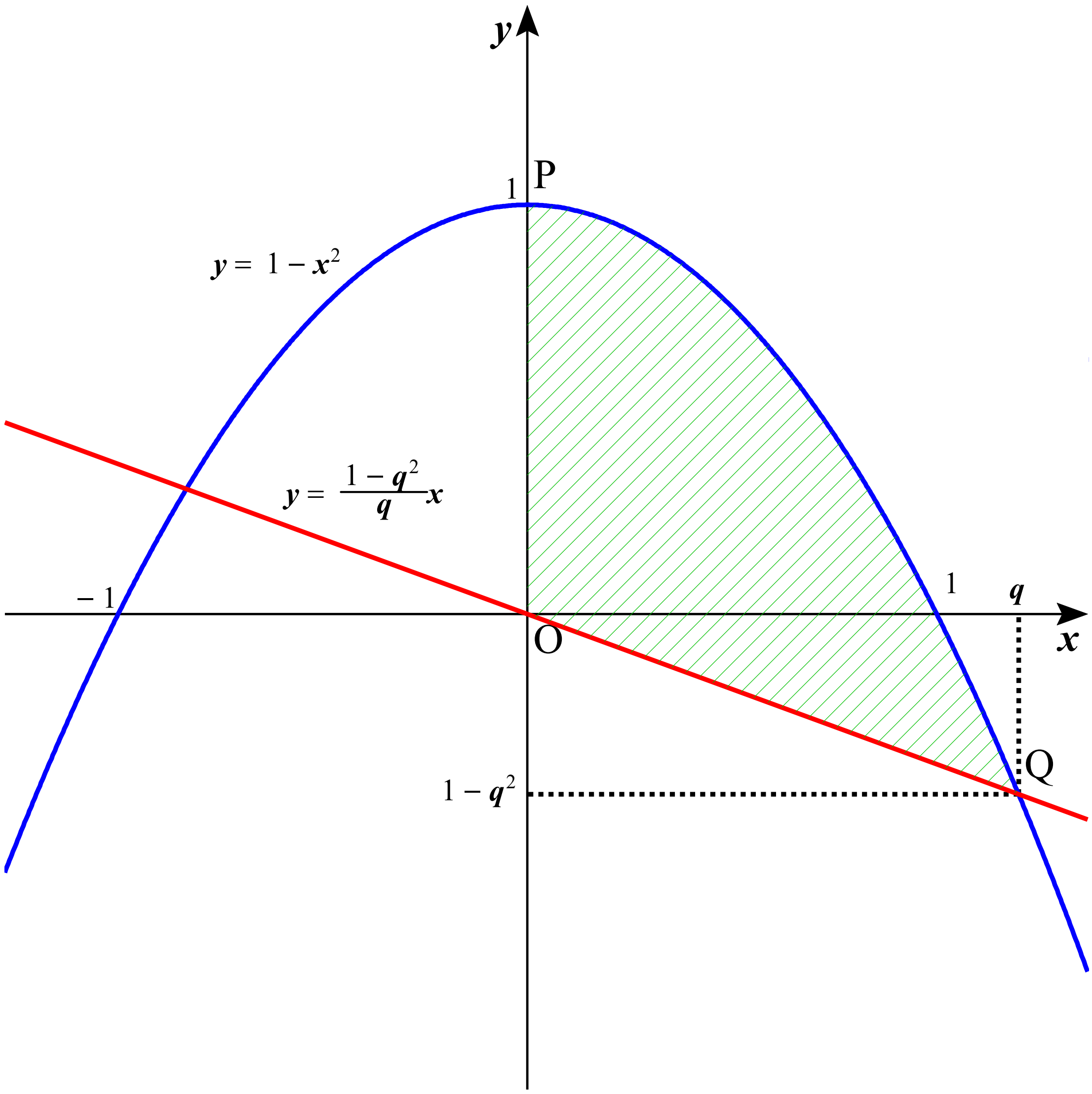
$$S=\int_0^q\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-q^2}{q}x\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-q^2}{2q}x^2-x\right]_0^q$$

$$=\frac{q^3}{6}+\frac{q}{2}$$

$$=\frac{q\left(q^2+3\right)}{6}$$

これは，(i)～(iii)の $S=\dfrac{(q-p)\left(p^2+pq+q^2+3\right)}{6}$ の p が 0 の場合の式と一致する。



(v)　$q=0$ のとき

下図斜線部（境界を含む）の面積が S である。

よって，

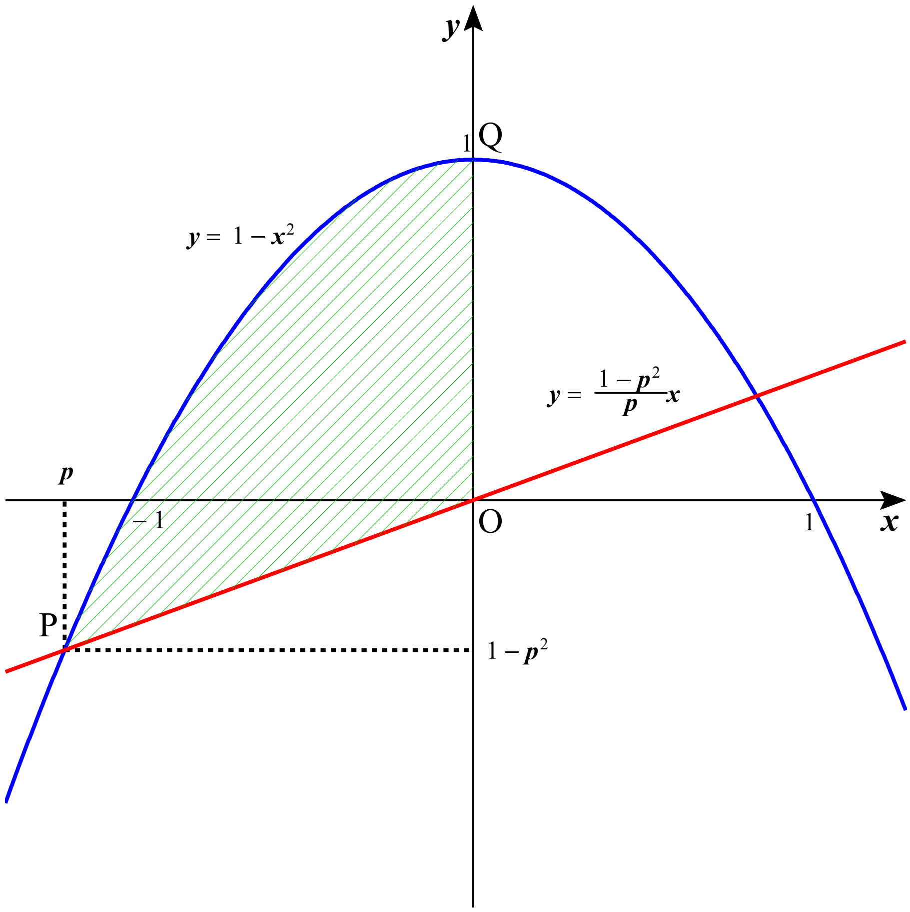
$$S=\int_p^0\left\{\left(1-x^2\right)-\frac{1-q^2}{q}x\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-q^2}{2q}x^2-x\right]_0^p$$

$$=-\frac{p^3}{6}-\frac{p}{2}$$

$$=-\frac{p\left(p^2+3\right)}{6}$$

これは，(i)～(iii)の $S=\dfrac{(q-p)\left(p^2+pq+q^2+3\right)}{6}$ の q が 0 の場合の式と一致する。



(i)～(v)より，　$S=\dfrac{(q-p)\left(p^2+pq+q^2+3\right)}{6}$

(2)

$$S=\frac{(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}{6}$$
$$=\frac{\{(p+1)-p\}\{p^2+p(p+1)+(p+1)^2+3\}}{6}$$
$$=\frac{3p^2+3p+4}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって，$p=-\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$のときSは最小値$\frac{13}{24}$をとる。

(3)

$$S=\frac{(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}{6}$$
$$=\frac{\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q^2}-1+q^2+3\right)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3$$

ここで，$p<q$，$pq=-1<0$より，$q>0$

よって，相加平均≧相乗平均より，$\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geq\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=8$

等号成立は$q=\frac{1}{q}$すなわち$q=1$のとき

よって，$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geq\frac{4}{3}$

ゆえに，$p=-1$，$q=1$のときSは最小値$\frac{4}{3}$をとる。